

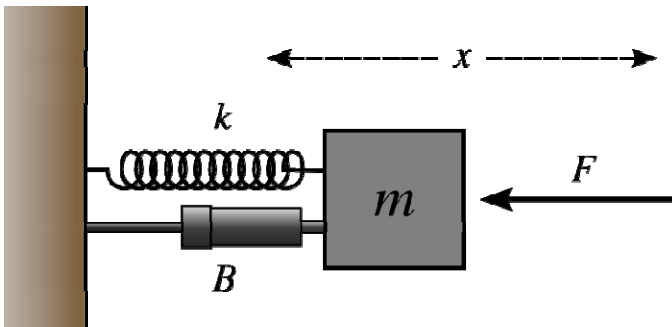
## 16) MODELOS PARAMÉTRICOS LINEALES

En los modelos no paramétricos obtenidos en ensayos al escalón u oscilatorios, la dinámica del sistema se representa con funciones temporales o frecuenciales del módulo, de la viscosidad, o de la compliancia.

Desarrollemos ahora modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales lineales y de coeficientes constantes.

### Introducción a Sistemas Diferenciales Lineales

#### Ej. 1 Oscilador Armónico Amortiguado



$$F + F_s + F_b + F_{in.} = 0$$

$$F_s = -k x$$

$$F_b = -B \dot{x}$$

$$F_{in.} = -m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{B}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}$$

- Relación de amortiguamiento:  $\zeta = \frac{B}{2\sqrt{mk}} \geq 0$  [Adimensional]
- Frecuencia natural no amortiguada:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \geq 0$  [rad./s]

Resulta:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$$

Con Entrada Sinusoidal:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_0 \sin(\omega t)$$

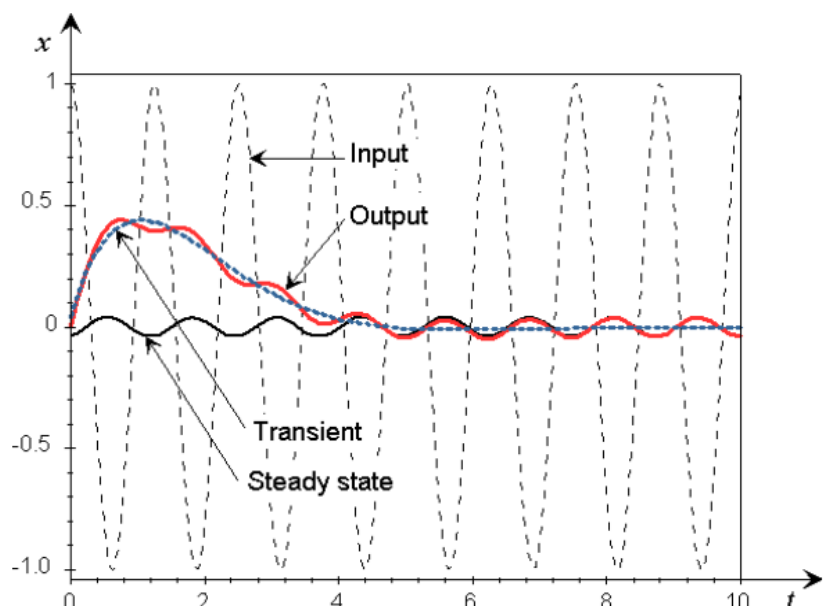
Ej. de Solución General:  $\ddot{x} + 1.5\dot{x} + x = \cos(\omega t)$ ; con  $x(0) = 0$ ;  $x'(0) = 1$ .

$$2\zeta\omega_0 = 1,5; \quad \omega_0^2 = 1$$

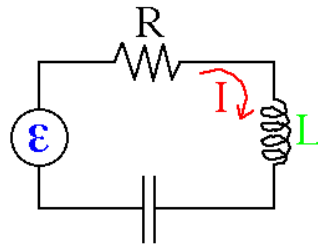
$$\zeta = 0,75; \quad \frac{F_0}{m} = 1$$

En los ensayos de DMA oscilatorios, los sistemas son sobreamortiguados ( $\zeta > 1$ ).

Además, la contribución inercial por la masa es despreciable con respecto a los otros términos.



**Ej. 2. Circuito RLC en serie:**



Sum the voltage drops around the loop:

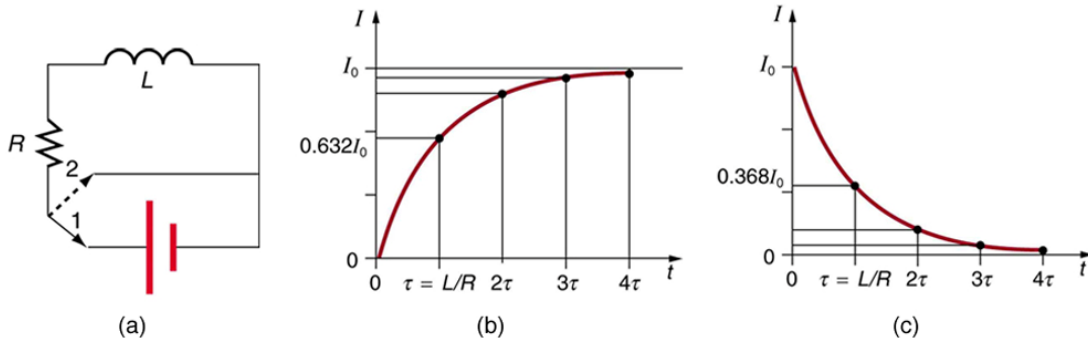
$$\epsilon = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

**Ej. 3. Respuesta en Frecuencia de elementos RLC individuales:**

Load Type	Circuit	Voltage/Current Waveform	Vector Diagram
Resistance			
Inductance			
Capacitance			

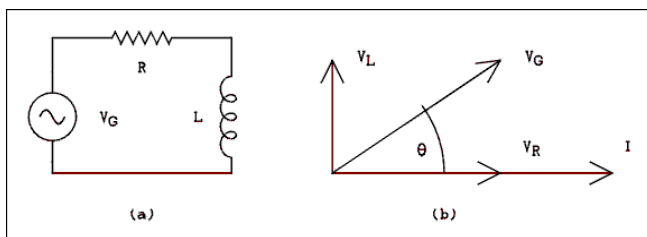
**Ej. 4. Sistemas de Primer Orden**

a.1) Circuito RL en serie ante entradas escalón en tensión (V) y Salida en I:



a.2) Circuito RL en serie con entrada  $V_0(t)$  y salida  $V_L(t)$ .

Filtro “Pasa-altos”

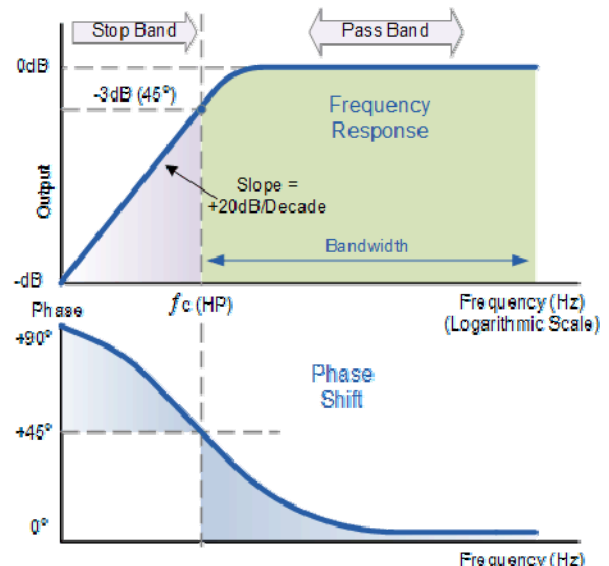


$$\dot{V}_L(t) + V_L(t) = \dot{V}_0(t)$$

Función de respuesta en frecuencia:

$$\frac{V_L(i\omega)}{V_0(i\omega)} = \frac{i\omega}{i\omega + 1}$$

$$\text{Gain (dB)} = 20 \log \frac{V_{out}}{V_{in}}$$



a.3) Ejemplo de Filtro “Pasa-bajos”:

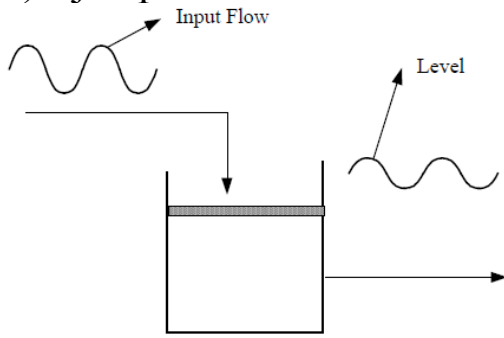
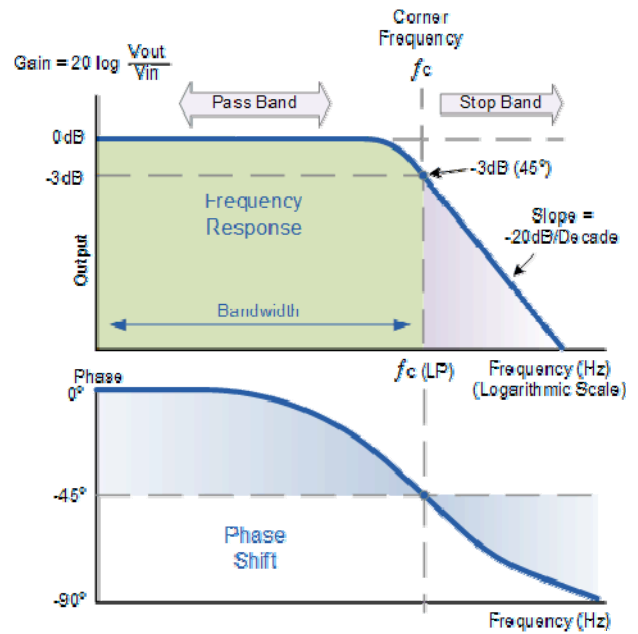


Figure B.3 Self-regulating level response to inlet flow variations.

$$\dot{L}(t) + L(t) = q(t)$$

$$\frac{L(i\omega)}{q(i\omega)} = \frac{1}{i\omega + 1}$$

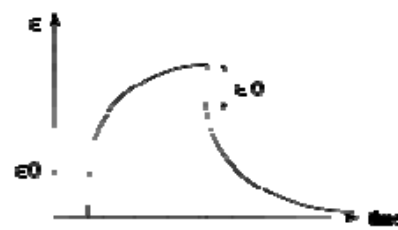


**Fluencia/ Recuperación en Modelos de 1 y 2 elementos básicos**

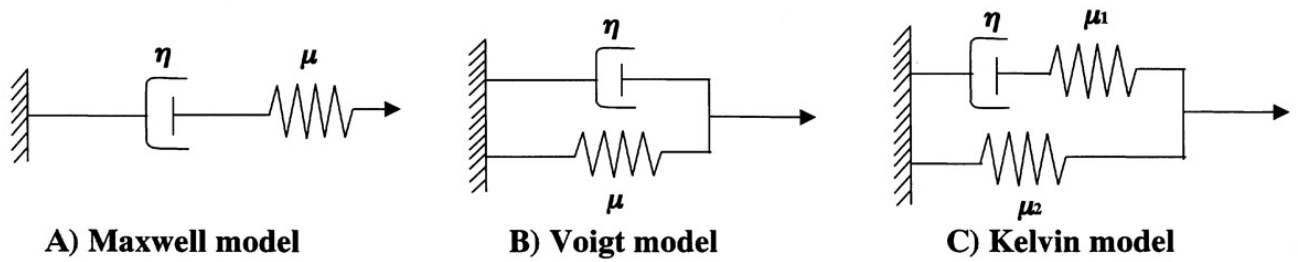
<p>Tensión <math>\sigma_0</math></p> <p>“Creep” Recuperación</p> <p>Tiempo t</p> $\sigma_s(t) = E_0 \varepsilon_s(t)$ $\sigma_d(t) = \eta_0 \frac{d\varepsilon_d(t)}{dt}$ $\varepsilon_d(t) = (\sigma_0/\eta_0) \times t$	
--	--

Nótese que en ningún caso se logra reproducir la respuesta de un típico material viscoelástico.

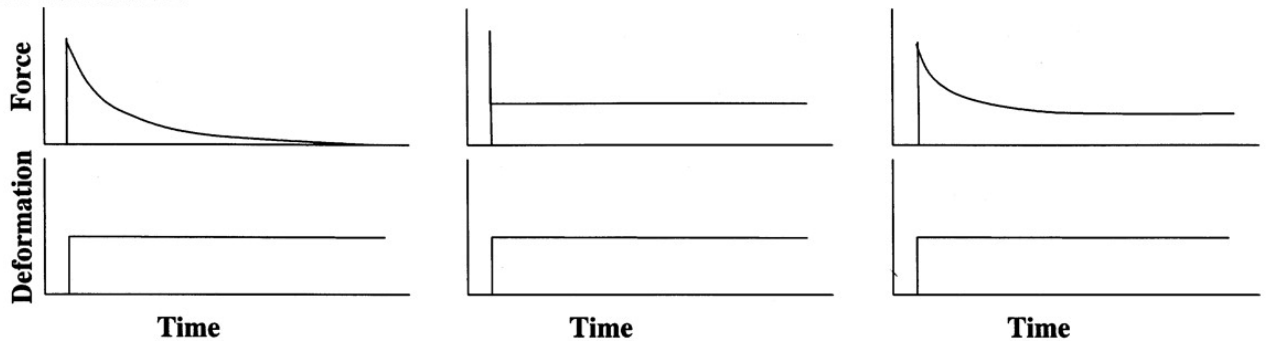
Para ello, necesitamos al menos 3 elementos...



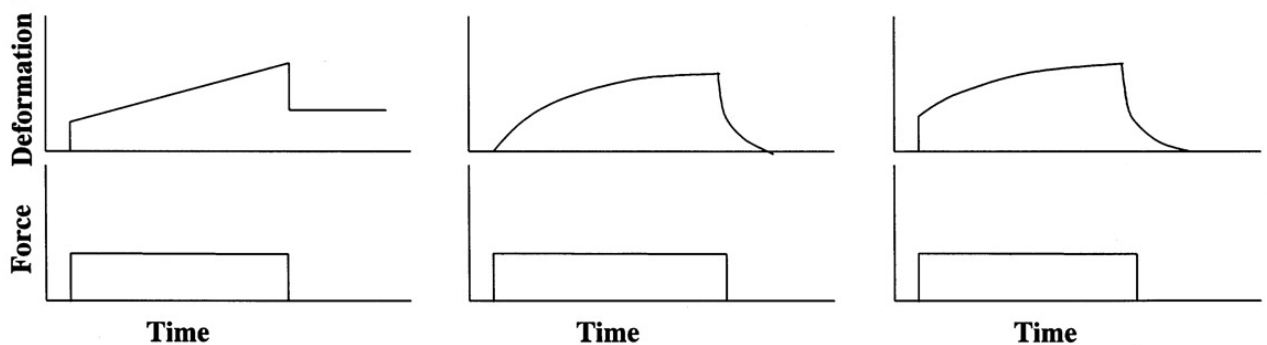
## Relajación a la Tensión y Fluencia/ Recuperación en Modelos 2 y 3 elementos básicos



### Stress relaxation



### Creep

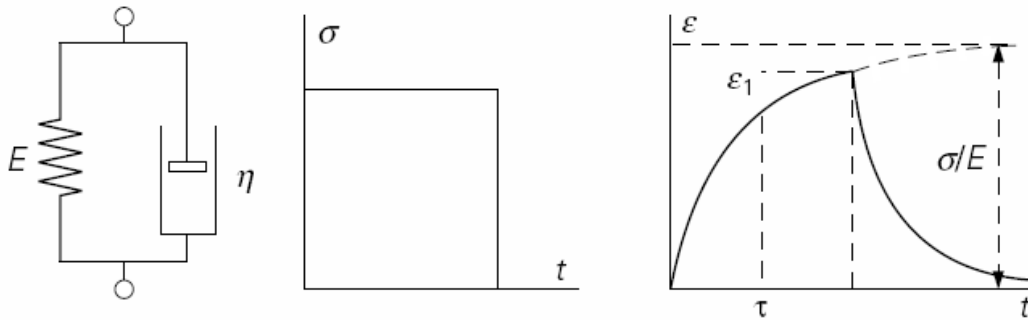


Nótese que:

- Modelo de Maxwell: representa bastante bien la relajación a la tensión en sólidos y la fluencia/ relajación en líquidos elásticos (pero no en sólidos).
- Modelo de Voigt: representa bastante bien a la fluencia/ recuperación pero es incapaz de representar a la relajación a la tensión (es imposible estirar instantáneamente a un líquido o a un amortiguador sin romperlo).
- Modelo de Kelvin: representa adecuadamente a los sistemas viscoelásticos ideales.

Derivemos a continuación las expresiones de los modelos de Maxwell y Voigt, ya que los casos más complicados los resolveremos combinando 2 o más de dichos modelos en serie o en paralelo

## Modelo de Voigt



En este caso, la deformación es igual en ambos elementos, y la tensión total es la suma de las tensiones:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_s(t) = \varepsilon_d(t)$$

$$\sigma = \sigma_{\text{spring}} + \sigma_{\text{dashpot}}$$

$$\sigma = E_0 \varepsilon + \eta_0 \dot{\varepsilon}$$

Dividiendo por  $E_0$  y definiendo  $\tau \equiv \frac{\eta_0}{E_0}$ , se obtiene la solución general:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} [1 - \exp(-t/\tau)]$$

## Fluencia/ Recuperación

En Fluencia/ Recuperación:  $\sigma(t+) = \sigma_0$  y entonces:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} [1 - \exp(-t/\tau)]$$

con:  $\varepsilon(0) = 0$ ; y  $\varepsilon(\infty) = \sigma_0/E_0$ .

Por último, el módulo de “creep” teórico resulta:

$$E_c(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$$

$$E_c(t) = \frac{1}{E_0} [1 - \exp(-t/\tau)]$$

con  $\tau \equiv \frac{\eta_0}{E_0} \quad [s = \frac{\text{Pa s}}{s}]$

Nótese que si bien el modelo tiene 2 parámetros, la respuesta temporal sólo depende de la constante de tiempo (es decir, del cociente entre  $\eta_0$  y  $E_0$ , pero no de los valores individuales).

## Relajación a la Tensión

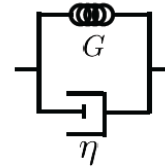
No puede implementarse.

## Respuesta en Frecuencia

Supongamos una deformación sinusoidal:

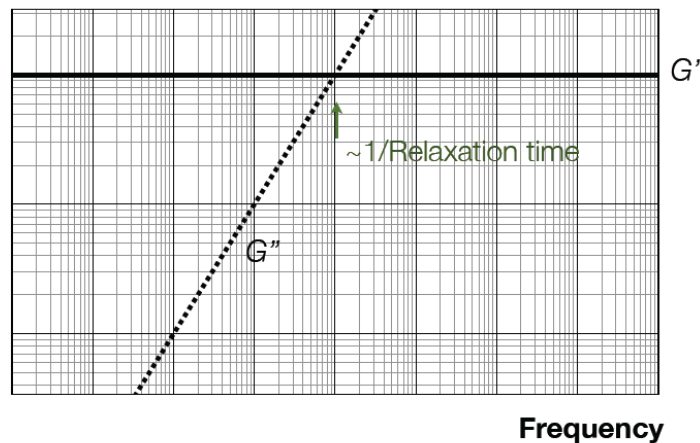
$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

- Elastic solid in parallel with viscous dashpot



- Timescale:  $\eta/G$

- $G'$ ,  $G''$  as a function of frequency are very simple



La tensión es:

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d$$

- $\sigma_s = G \varepsilon = G \varepsilon_0 \sin \omega t$

- $\sigma_d = \eta \dot{\varepsilon} = \eta \omega \cos \omega t$

$$\sigma = G \varepsilon_0 \sin \omega t + \eta \omega \varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$\sigma/\varepsilon_0 = G \sin \omega t + \eta \omega \cos \omega t$$

Luego:

$$G' = G \quad (\text{el módulo de almacenaje es constante!})$$

$$G'' = \eta \omega \quad \text{y} \quad \tan \delta = \frac{G''}{G'} = \frac{\eta \omega}{G} \equiv T \omega$$

(tanto el Módulo de Pérdida como  $\tan \delta$  aumentan linealmente con  $\omega$ !)

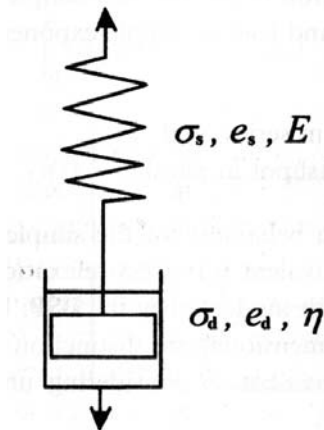
\* \* \*

En resumen: el modelo de Voigt reproduce bastante bien a los ensayos de “creep”/ recuperación en sólidos, pero es incapaz de representar la relajación a la tensión, o la respuesta en frecuencia.

## Modelo de Maxwell

$$\sigma_s = E e_s$$

$$\sigma_d = \eta \frac{de_d}{dt}$$



En este caso es:

$$\sigma_s(t) = \sigma_d(t) = \sigma(t) = E e_s = \eta \frac{de_d}{dt}$$

$$e(t) = e_s(t) + e_d(t)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{de_s}{dt} + \frac{de_d}{dt}$$

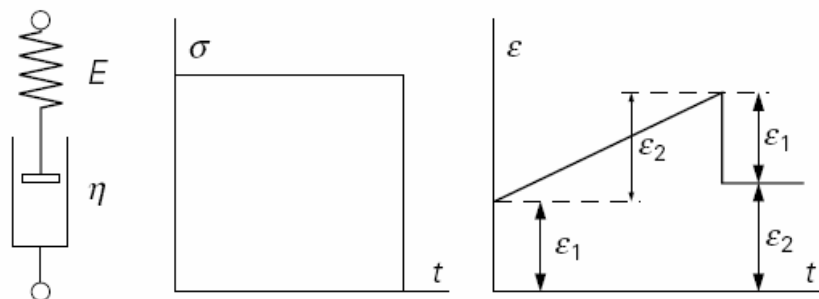
$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \tau \frac{d\sigma}{dt} + \sigma; \quad (\tau \equiv \frac{\eta}{E} \quad \text{Tiempo de Relajaci3n})$$

Integrando la anterior:

$$e(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{\int \sigma(t) dt}{\eta}$$

**Fluencia/ Recuperaci3n:  $\sigma = \sigma_0$**

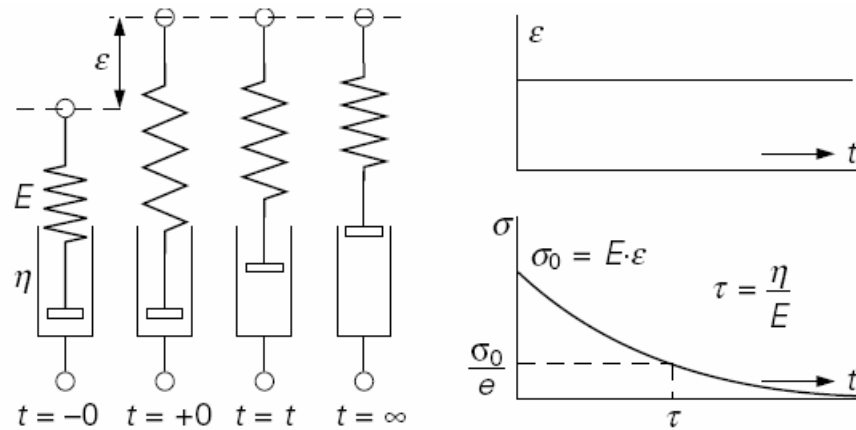


$$e(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t; \quad e(t) = e_1(t) + e_2(t)$$

Compliancia de “creep”:

$$J_c(t) = e(t)/\sigma_0 = J_0 + t/\eta$$

### Relajación a la Tensión: a $t = +0$ : $e = e_0$ y $\dot{e}(t) = 0$



$$\sigma = \sigma_s = E e_s = \sigma_d = \eta \frac{de_d}{dt} = \eta \frac{d(e - e_s)}{dt} = -\eta \frac{de_s}{dt}$$

$$-\eta \frac{de_s}{dt} = E e_s$$

$$\frac{de_s}{e_s} = -\frac{E}{\eta} dt$$

$$\ln e_s = -\frac{E}{\eta} t + C$$

$$e_s = e^{-\frac{E}{\eta} t} \times C'$$

$$\sigma(t) = E e_s = E \times \exp[-t/T] \times C' \text{ (solución general)}$$

$$T \equiv \frac{\eta}{E}; \quad [s] = \left[ \frac{\text{Ns/m}^2}{\text{N/m}^2} \right]$$

En relaj. a la tensión: a  $t = 0$ ,  $\sigma_0 = E e_0$ . Por lo tanto:  $C' = e_0$ . Reemplazando:

$$\sigma(t) = E e_0 \exp[-t/T];$$

Módulo de Relajación a la Tensión:  $E_r(t) = \sigma_0 \exp[-t/T]$

$$T = \frac{\eta}{E}$$

- A  $t = T$ :  $\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{e} = 0,37 \sigma_0$ , ( $\sigma_0 = E e_0$ ).



## Respuesta en Frecuencia

Multiplicamos a  $\frac{de}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$  por E y reemplazamos  $T = \frac{\eta}{E}$ ,

tenemos:

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{\sigma(t)}{T} = E \dot{e}(t)$$

Supongamos una entrada sinusoidal en la deformación  $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$ .

Pasemos la ec. dif. al dominio transformado de Laplace:

$$s \sigma(s) + \frac{\sigma(s)}{T} = E s e(s)$$

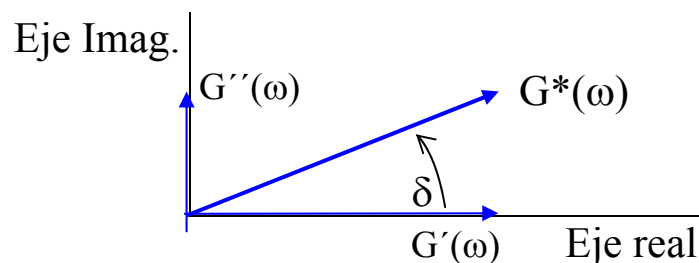
$$\sigma(s) \left( s + \frac{1}{T} \right) = E s e(s)$$

$\tilde{G}(s)$ : F. de transferencia reducida (o Laplaciano del módulo elástico):

$$\frac{\tilde{G}(s)}{E} = \frac{\sigma(s)}{e(s)} = \frac{s}{s + 1/T} = \frac{Ts}{Ts + 1}$$

Respuesta en frecuencia (con  $E = G_0$ ):

$$\frac{G^*(j\omega)}{G_0} = \frac{\sigma(j\omega)}{e(j\omega)} = \frac{Tj\omega}{Tj\omega + 1} \left( \frac{Tj\omega - 1}{Tj\omega - 1} \right) = \left( \frac{T^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} \right) + \left( \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \right) j$$



$$\frac{G^*(j\omega)}{G_0} = G'(\omega) + G''(\omega) j;$$

con:  $G'(\omega) = G_0 \left( \frac{T^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} \right); \quad G''(\omega) = G_0 \left( \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \right)$

Alternativamente, en magnitud y ángulo:

$$|G^*(j\omega)| = G_0 \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$\delta = \arctan \frac{G''}{G'} = \arctan \frac{1}{\omega T}$$

- Cuando  $\omega \rightarrow \infty$ :  $|G^*(j\omega)| \rightarrow G_0$  y  $\delta \rightarrow 0$  ( $\rightarrow$  elem. elástico puro)
- Cuando  $\omega \rightarrow 0$ :  $|G^*(j\omega)| \rightarrow 0$  y  $\delta \rightarrow +90^\circ$  ( $\rightarrow$  elem. viscoso puro)

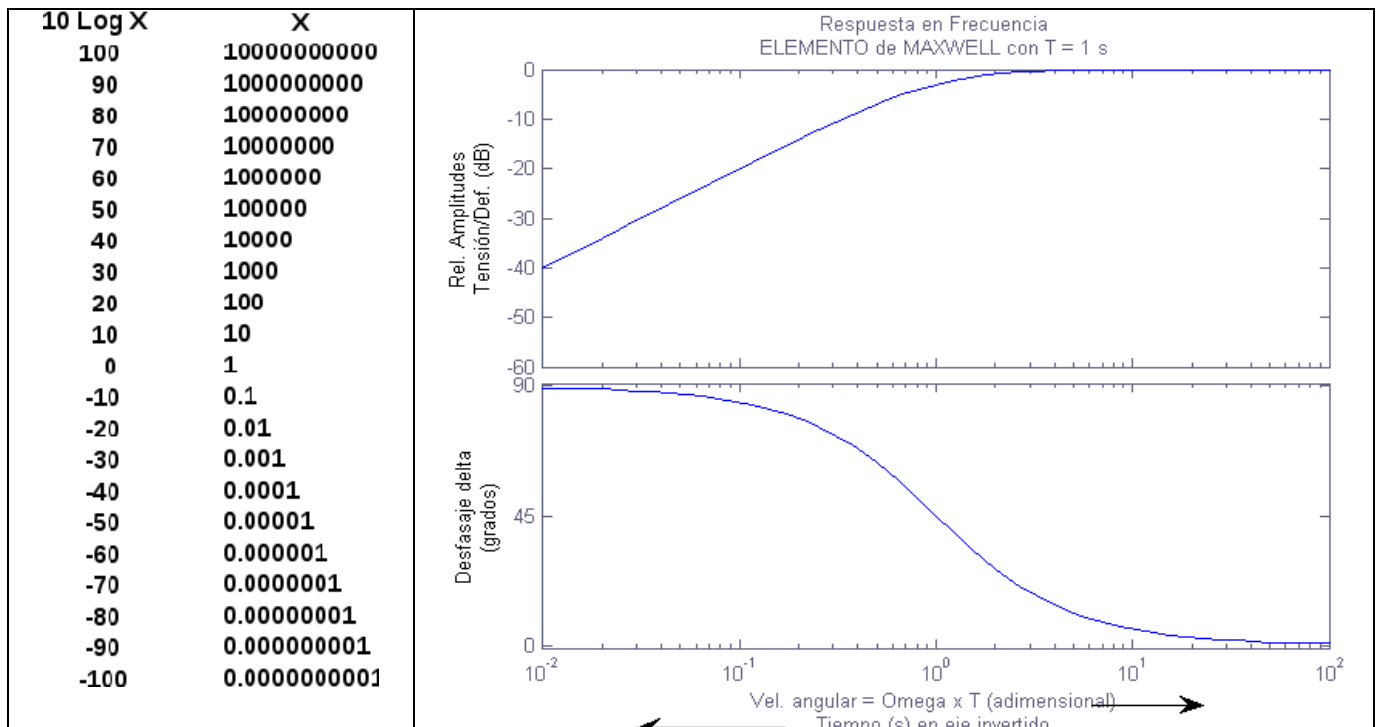
Nótese que la respuesta en frecuencia también depende de un único parámetro:  $T$ .

Respuesta en frecuencia (para  $G_0 = 1$ ) en escala doble-logarítmica:

a) eje de abscisas adimensional  $\log(\omega T)$ ; y

b) escala logarítmica para el módulo complejo, expresada en decibelios:

$$[\text{Rel. Ampl. en dB} \equiv 10 \times \log_{10} (\sigma_0/\epsilon_0)]$$



Se denomina Diagrama de Bode al conjunto de asíntotas del diagrama anterior.

Nótese que la constante de tiempo ( $T = 1$ ) se ubica en la intersección de las asíntotas del diagrama doble logarítmico de la relación de amplitudes.

Alternativamente, representando  $G_1$ ,  $G_2$  y  $\tan \delta$  (en ejes lineales) vs.  $\log \omega T$ , se obtiene:

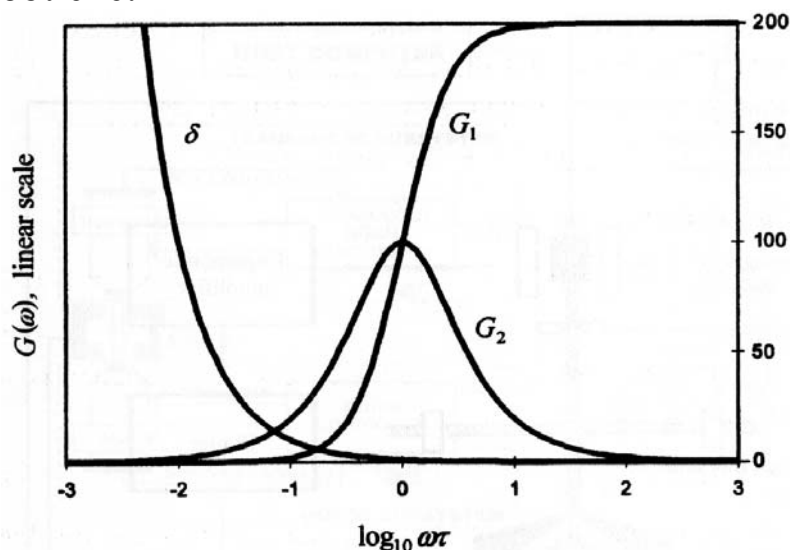


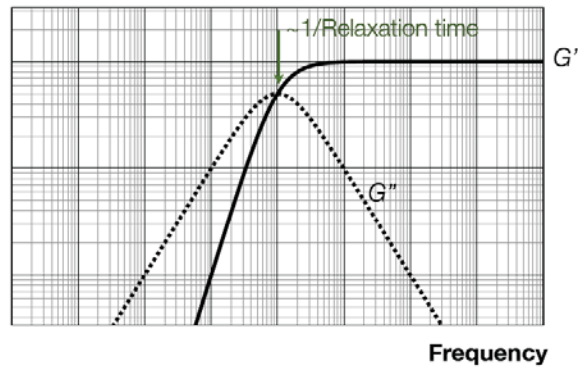
Fig. 7.11  $G_1$ ,  $G_2$  and  $\delta$  as functions of  $\omega$  for the Maxwell model.

También, con ejes doble-logarítmicos, resulta:

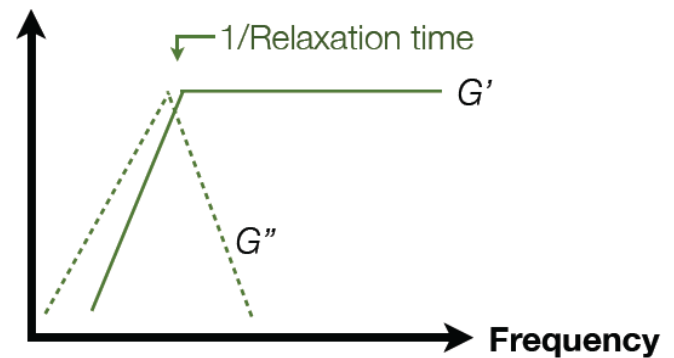
- Elastic solid in series with viscous dashpot (e.g. entangled polymer solution) 

- Timescale:  $\eta/G$

- Can derive functional form of  $G'$ ,  $G''$  as a function of frequency



La respuesta en frecuencia por DMTA da resultados muy similares a los del Modelo de Maxwell en cuanto a la variación de los módulos (a bajas frecuencias, el material luce como más blando, y  $G''$  es máximo en la región viscoelástica).



Sin embargo, en los materiales reales el máximo de  $\tan\delta$  se encuentra próximo al máximo de  $G''$ , y no en  $f \rightarrow 0$ .

En resumen:

- 1) Los módulos del Modelo de Maxwell representan bastante bien al sólido amorfo ( $G'$  presenta dos mesetas y  $G''$  pasa por un máximo en  $\omega = 1/T$ ).
- 2) Sin embargo, el máximo de  $\tan \delta$  no aparece cercano al de  $G''$ . (Según  $\tan \delta$ , el material se comporta como un sólido elástico ideal a altas frecuencias, y como un líquido viscoso ideal a bajas frecuencias.)

## **Tiempo Medio de Relajación y Número de Débora**

Verso bíblico de la Profetisa Débora: “Las montañas fluyeron delante del Señor...”.

El N° Débora es un adimensional que identifica el carácter (rígido o plástico) de un material a una temperatura dada.

$$De = \frac{\text{Tiempo de relajación del Modelo de Maxwell ante deformación constante}}{\text{Tiempo del experimento}}$$

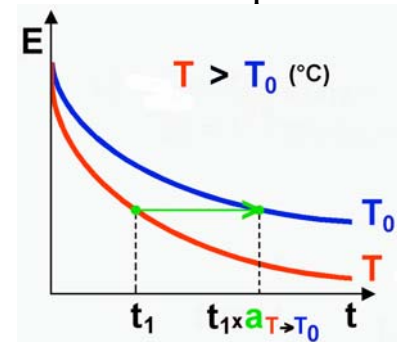
- De bajo: el material tiende a comportarse como un fluido viscoso newtoniano;
- De alto: el material tiende a un sólido elástico.

El tiempo de relajación depende por supuesto también de la temperatura:

Módulo de relajación a la tensión

$t_1$ : tiempo medio de rel. a  $T (>T_0)$

$t_1 \times a_{(T \rightarrow T_0)}$ : tiempo medio de rel. a  $T_0 < T_0$



## **Limitaciones de los Modelos Simples**

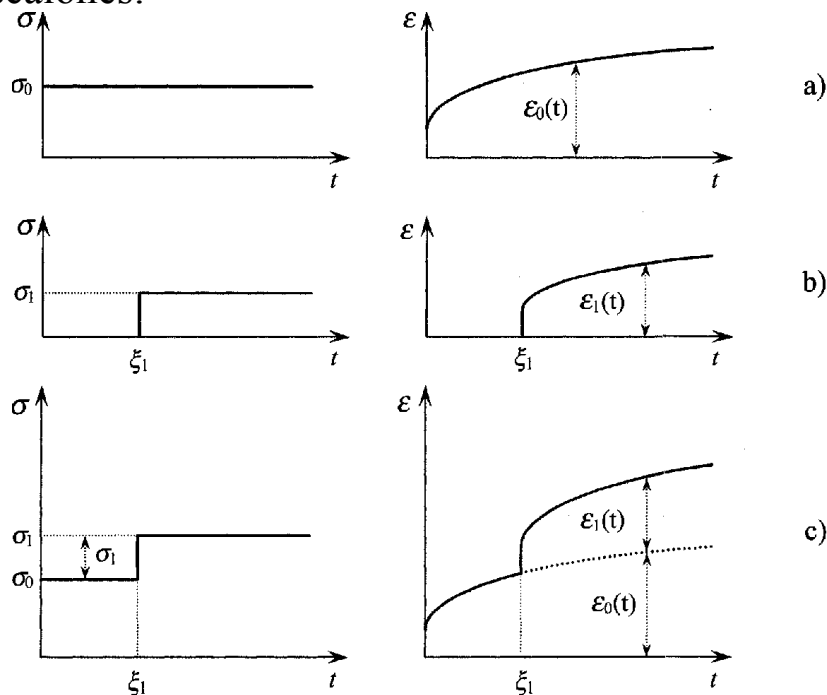
- El modelo de Maxwell no describe respuestas elásticas retardadas (p.ej.: en “creep”).
- El modelo de Voigt no describe relajaciones de la tensión.
- Ambos modelos involucran a un único tiempo de relajación y en muchos casos la descripción del proceso requiere de varios tiempos de relajación e incluso hasta de un espectro de tiempos de relajación.

## **Principio de Superposición de Boltzmann**

Ante los diversos tipos de entradas temporales (ya sea en  $\sigma$  o en  $\epsilon$ ), los modelos viscoelásticos lineales permiten resolver las ecuaciones del movimiento por aplicación del siguiente Principio de Superposición:

“Como la deformación es una función lineal de la tensión, entonces la deformación total ante una suma de tensiones es igual a la suma de los efectos de aplicar cada una de ellas en forma independiente”.

Ej. 1: Deformación de un material viscoelástico lineal ante una entrada en tensión de 2 escalones:



La deformación final depende no sólo de la magnitud del cambio que la genera, sino también del tiempo transcurrido desde la aplicación del esfuerzo hasta la observación de dicho efecto.

Ej. 2: Sea un Elemento de Maxwell de  $E = 10^9$  Pa y  $\eta = 10^{11}$  Pa s. Hallar la tensión generada a  $t = 100$  s, luego de la aplicación de las siguientes deformaciones: a  $t = 0$  s,  $\epsilon$  pasa de 0% a 1%, y a  $t = 30$  s, pasa de 1% a 2%:

Relaj. a est. constante a  $t = t_1$  en El. Maxwell:

$$\sigma(t) = E \epsilon_0 \exp[-(t - t_1)/\tau]; \quad \text{con} \quad \tau = \frac{\eta}{E}$$

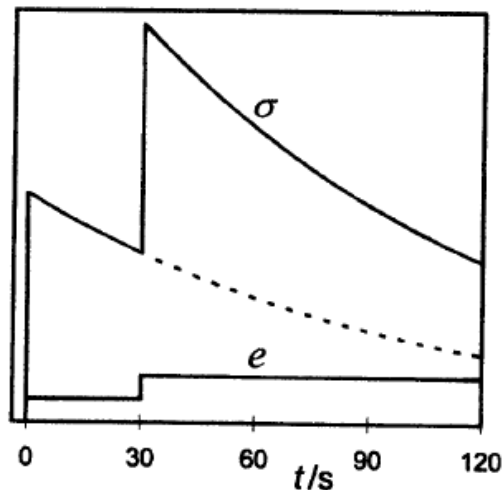
Por el Ppio de Superposición:

$$\sigma(t) = \sigma_1 \exp[-(t - t_1)/\tau] + \sigma_2 \exp[-(t - t_2)/\tau]$$

$$\tau = \frac{10^{11} \text{ Pa s}}{10^9 \text{ Pa}} = 100 \text{ s}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = E \epsilon_{01} = E \epsilon_{02} = 10^9 \text{ Pa} \cdot 0,01 = 10^7 \text{ Pa}$$

$$t_1 = 0 \text{ s}; \quad t_2 = 30 \text{ s}$$



$$\sigma(100) = 10^7 \text{ Pa} \exp[-(100/100)] + 10^7 \text{ Pa} \exp[-(100 - 30)/100] = 10^7 (e^{-1} + e^{-0,7})$$

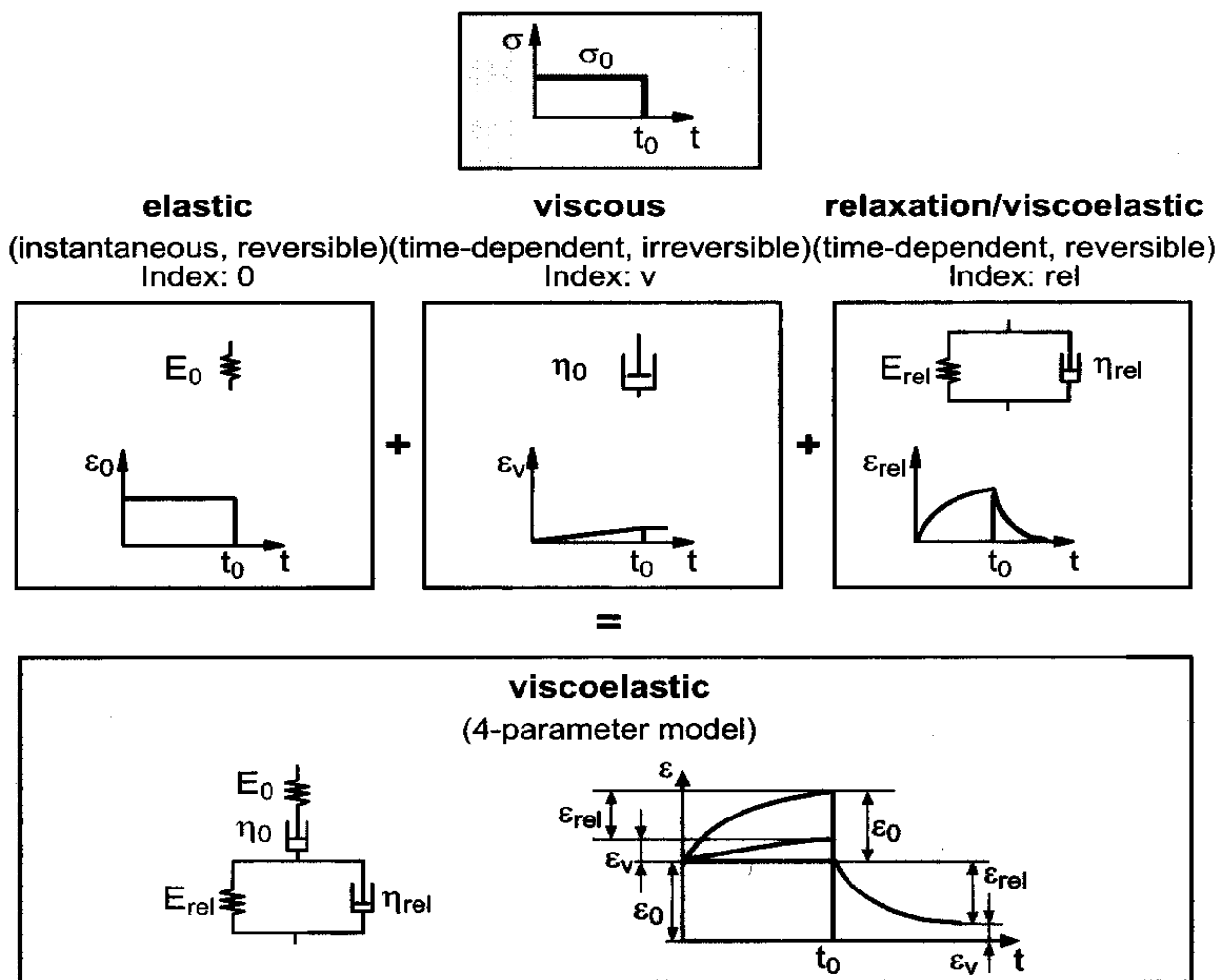
$$\sigma(100) = 8,6 \times 10^6 \text{ Pa.}$$

## Sólido Estándar de 4 Parámetros (elástico + viscoso + elástico retardado)

La conexión en serie de los modelos de Maxwell y Voigt permiten simular adecuadamente el ensayo de “creep”/ recuperación de un sólido viscoelástico lineal. Requiere del ajuste de 4 parámetros constantes.

Consideremos 3 elementos en serie (un resorte  $E_0$ , un amortiguador  $\eta_0$ , y un elemento de Voigt)

sometidos a una misma tensión constante  $\sigma_0$  entre  $t = 0$  y  $t = t_0$ . Aplicamos el principio de superposición a cada uno de los 3 elementos en serie:



- Resorte:  $\epsilon_0 = \sigma_0/E_0$
- Amortiguador:  $\epsilon_v = (\sigma_0 t)/\eta_0$
- Elemento de Voigt-Kelvin:  $\epsilon_{rel} = \sigma_0/E_{rel} [1 - \exp(- E_{rel} t/\eta_{rel})]$

Deformación de “creep”:

$$\epsilon(t) = \sigma_0(t) \left\{ \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_{rel}} [1 - \exp(- t/\tau)] + \frac{t}{\eta_0} \right\} \quad \text{con } \tau = \frac{\eta_{rel}}{E_{rel}}$$

## Modelos de Sólidos con Varios Mecanismos de Relajación

El modelo anterior resulta insuficiente para describir a sistemas que responden simultáneamente a varios tiempos de relajación distintos. En tales casos, se proponen modelos lineales que involucren a varias constantes de tiempo  $\tau_i$ , cada una de las cuales queda determinada por el par  $(E_i, \eta_i)$ . Existen 2 posibilidades básicas.

### Dos ó más el. de Maxwell en paralelo (Maxwell-Weichert):

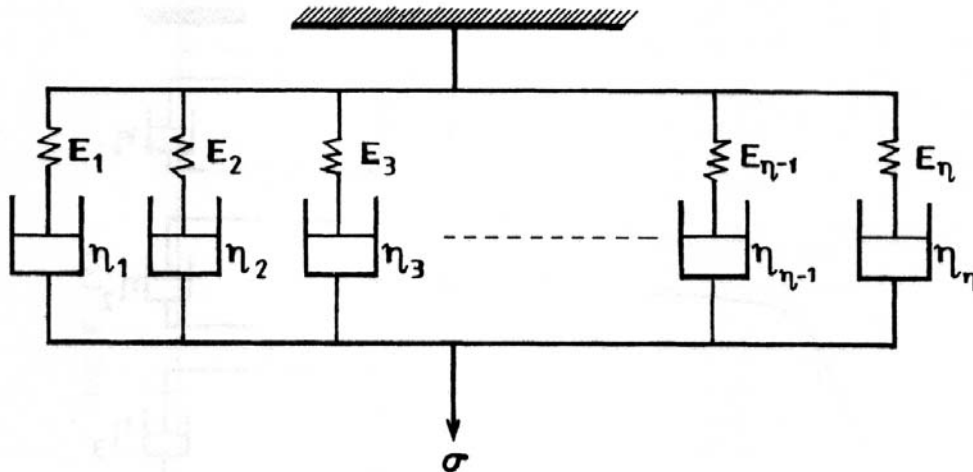


Figure 14.11 The Maxwell-Weichert model.

### Dos ó más elementos de Voigt-Kelvin en serie:

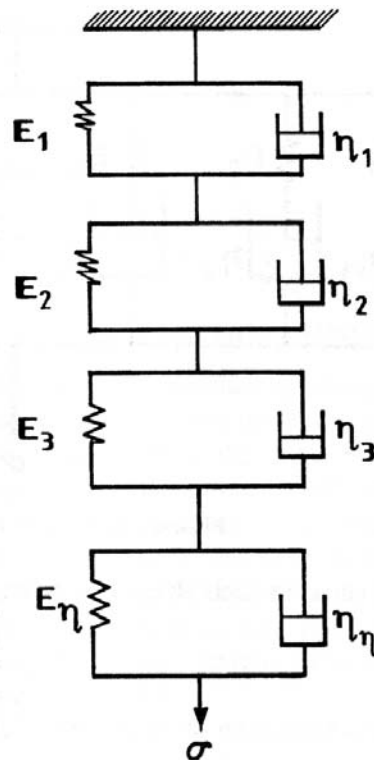


Figure 14.12 Voigt-Kelvin model.

*Expresiones teóricas para mediciones de respuesta en frecuencia mediante elementos de Maxwell en paralelo*

Los módulos totales se calculan por simple adición de los efectos de cada elemento de Maxwell. Así por ejemplo, si se emplean 2 Modelos de Maxwell en paralelo, resulta:

$$G'(\omega) = G_1 \frac{\tau_1^2 \omega^2}{\tau_1^2 \omega^2 + 1} + G_2 \frac{\tau_2^2 \omega^2}{\tau_2^2 \omega^2 + 1};$$

$$G''(\omega) = G_1 \frac{\tau_1 \omega}{\tau_1^2 \omega^2 + 1} + G_2 \frac{\tau_2 \omega}{\tau_2^2 \omega^2 + 1}$$

Ej.: DMA oscilatorio de un shampoo para cabello.

Al aumentar la frecuencia, el material pasa de viscoso a elástico.

1) Ajuste con 1 sólo Elemento de Maxwell, resultando  $\eta = 97,7 \text{ Pa s}$  y  $\tau = 0,162 \text{ s}$ ; por lo cual resulta  $G = 603 \text{ Pa}$  y  $1/\tau = 6,17 \text{ rad/s}$ .

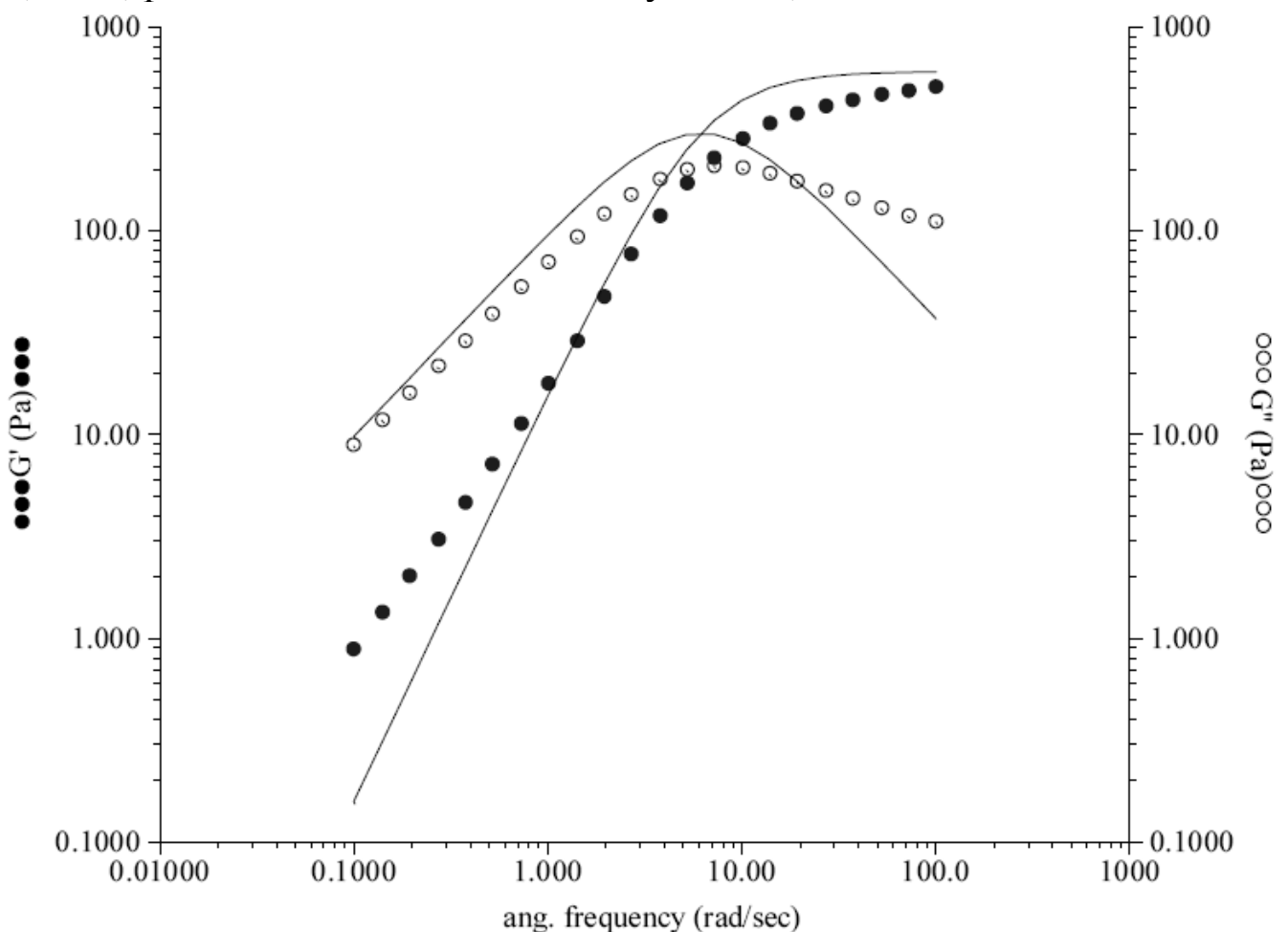


Figure 4: oscillation data for hair shampoo fitted with a single element Maxwell model

Con 2 parámetros se reproduce bien la constante de tiempo, pero el ajuste general es sólo aproximado.



## 2) Ajuste con 4 Elementos de Maxwell en paralelo

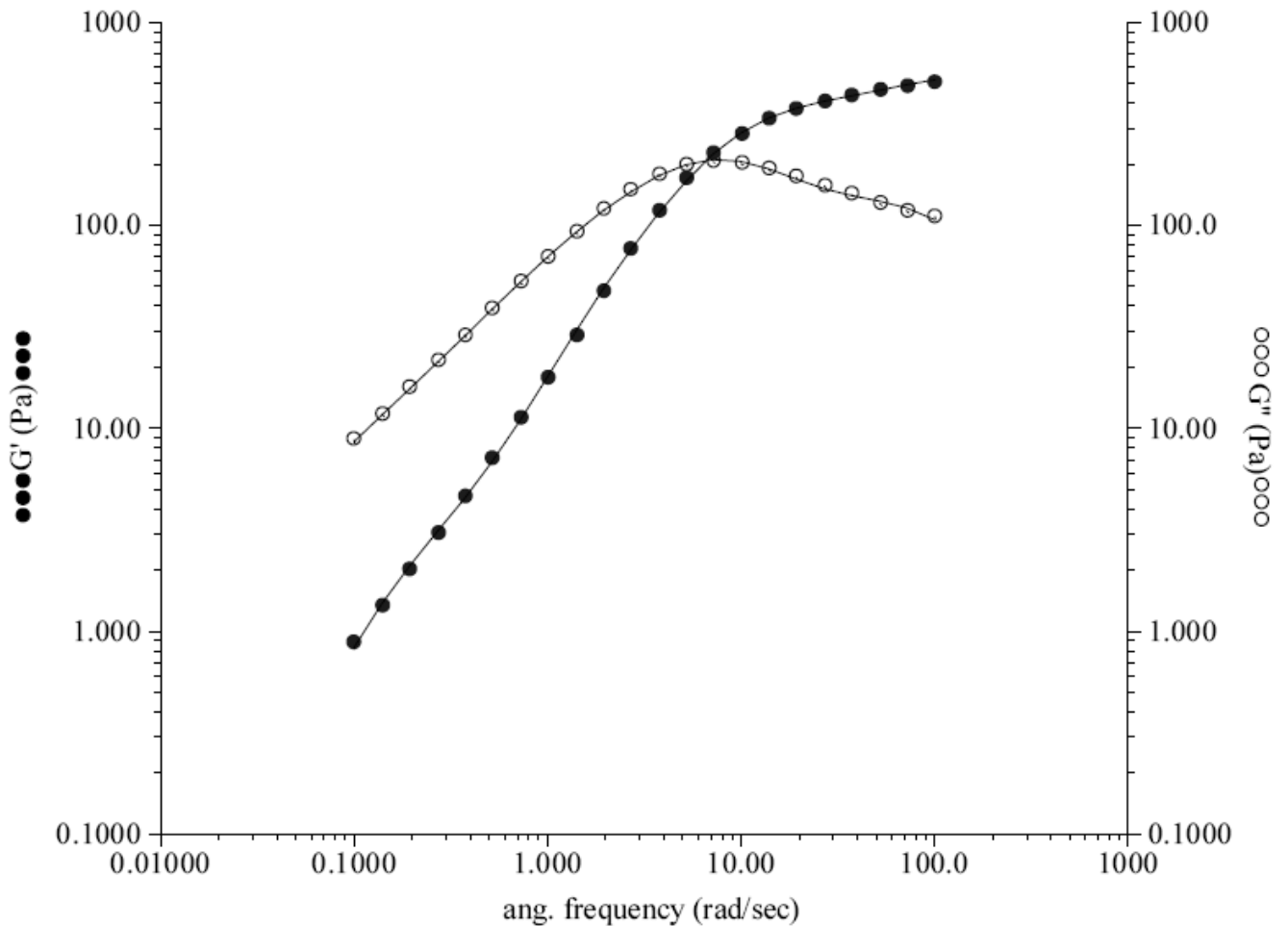


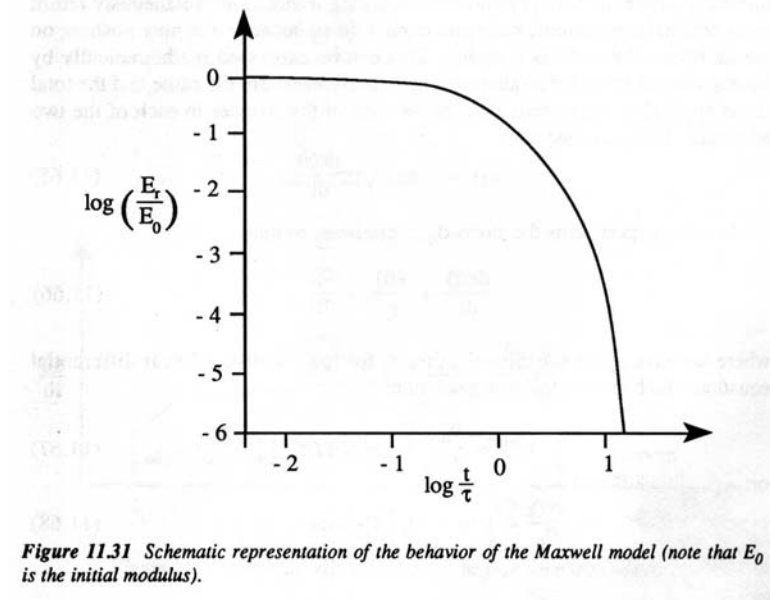
Figure 7: data of Figure 4 fitted with a four element Maxwell model

Figure 7 shows the data of Figure 4 fitted with a four element Maxwell model. (Rule of thumb is to use one Maxwell unit per decade of Frequency) It can be seen that an excellent fit is achieved, as indicated by the standard error of 6.302. The software gave  $\eta_1 = 24.78$  Pa s,  $\lambda_1 = 0.4523$  s, (i.e.  $G_1 = 54.79$  Pa);  $\eta_2 = 15.03$  Pa s,  $\lambda_2 = 5.893$  s, ( $G_2 = 2.550$  Pa);  $\eta_3 = 2.278$  Pa s,  $\lambda_3 = 0.01377$  s, ( $G_3 = 165.4$  Pa);  $\eta_4 = 47.46$  Pa s,  $\lambda_4 = 0.1326$  s, ( $G_4 = 357.9$ ).

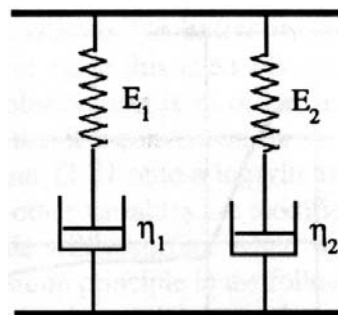
Con 8 parámetros, se ajustan perfectamente las mediciones experimentales. Tentativamente, se propone un elemento de Maxwell por década de frecuencias.

## Relajación a la tensión de un termoplástico amorfo no entrecruzado y de alto M mediante un modelo de Maxwell-Weichert de 2 elementos

El elemento de Maxwell permite modelar a un único modo de relajación a la tensión. Representemos en escala doble logarítmica al módulo de relajación relativo *vs.*  $\log(t/\tau)$ . Se observa la meseta vítrea pero no la gomosa:



Para incluir a la meseta gomosa, se requieren al menos 2 elementos de Maxwell en paralelo de distintas constantes de tiempo  $\tau_i \equiv \eta_i/E_i$ :



*Ejemplo.* Simule la relajación a la tensión en un termoplástico a  $T > T_g$ , con las siguientes características:

- a tiempos cortos o altas frecuencias: mat. elástico de  $E_1 = 3 \times 10^9$  Pa;
- a tiempos o frecuencias intermedias: aparecen relajaciones moleculares de  $\tau_1 = 1$  min. (típicas de una  $T_g$ ), que representan a desplazamientos de pedazos de cadenas de entre 40 y 50 Carbonos;
- meseta gomosa con  $E_2 = 5 \times 10^5$ ; y
- a tiempos largos o frecuencias bajas: relajaciones moleculares de  $\tau_2 = 1000$  min. características de un fluido, que representan a deslizamientos de cadenas completas de unas contra otras.

En el ensayo de relajación a la tensión, imponemos un desplazamiento constante, y entonces:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 = 0$$

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t)$$

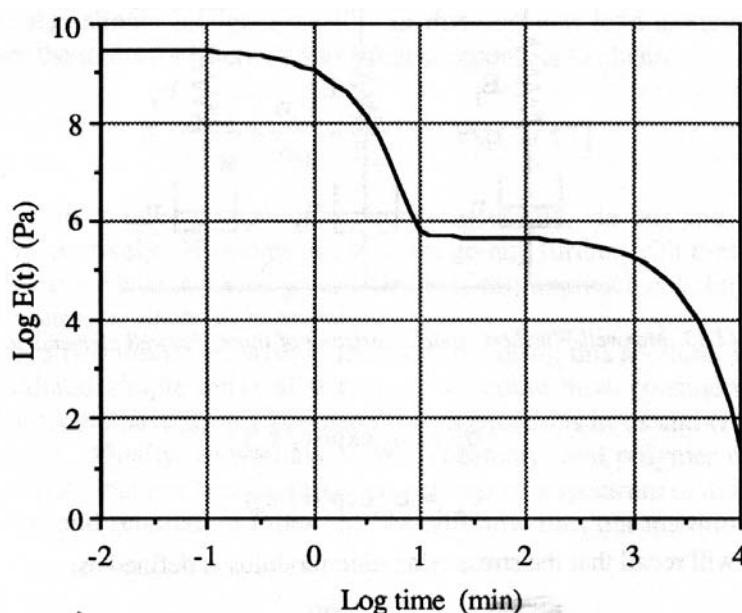
$$\sigma(t) = \sigma_{01} \exp(-t/\tau_1) + \sigma_{02} \exp(-t/\tau_2)$$

$$E_r(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0 = (\sigma_{01}/\varepsilon_0) \exp(-t/\tau_1) + (\sigma_{02}/\varepsilon_0) \exp(-t/\tau_2)$$

$$\text{con } E_1 = \sigma_{01}/\varepsilon_0 \text{ y } E_2 = \sigma_{02}/\varepsilon_0$$

$$E_r(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0 = 3 \times 10^9 \exp(-t) + 5 \times 10^5 \exp(-t/1000)$$

Se obtiene:



**Figure 11.34** Behavior of a two component Maxwell-Wiechert model in stress relaxation. Calculated using equation 11.77 with values of  $E_1 = 3 \times 10^9$  Pa,  $E_2 = 5 \times 10^5$  Pa,  $\tau_1 = 1$  min and  $\tau_2 = 10^3$  min. After J. Aklonis and W. Macknight, Introduction to Polymer Viscoelasticity, John Wiley and Sons, New York (1983).

El resultado anterior puede generalizarse a  $n$  componentes en paralelo:

$$E_r(t) = \sum_n E_n \exp(-t/\tau_{1n}), \text{ con } E_n = \sigma_{0n}/\varepsilon_n$$

Más aún, asumiendo una distribución continua de los tiempos de relajación  $E_r(\tau_n)$ , la sumatoria anterior se reemplaza por la integral:

$$E_r(t) = \int_0^{\infty} E(\tau_1) \exp(-t/\tau_1) d\tau_1.$$